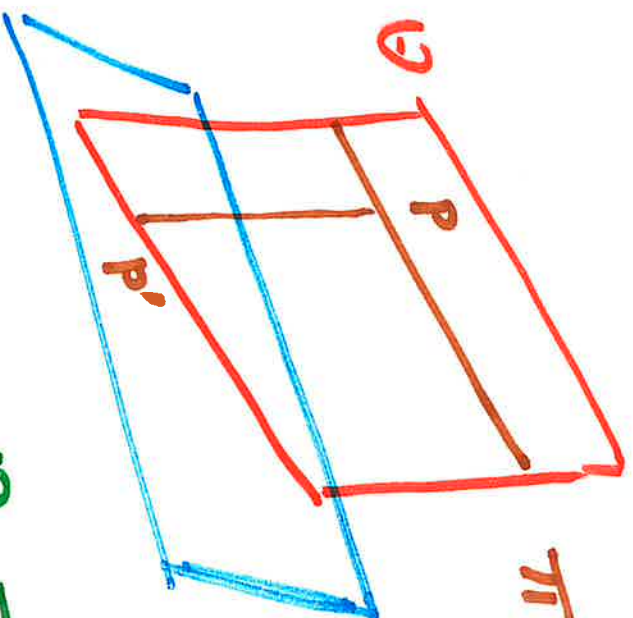




$$\pi = [P; \mathcal{U}]$$

$$\pi // \Sigma$$

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$$

$$\Sigma = [\mathcal{Q}; \mathcal{W}]$$

$$\Theta = [P; \mathcal{U} + \mathcal{W}^\perp] \Rightarrow$$

consideriamo

$$1) \pi \subseteq \Theta$$

$$2) \Theta \perp \Sigma \text{ infatti } \mathcal{W}^\perp \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{W}^\perp$$

$$3) \Theta \cap \Sigma = [P'; \mathcal{U}] -$$

Dim: $\Theta \cap \Sigma = [R; (\mathcal{U} + \mathcal{W}^\perp) \cap \mathcal{W}]$

verifichiamo che $(\mathcal{U} + \mathcal{W}^\perp) \cap \mathcal{W} = \mathcal{U}$. Infatti $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \Rightarrow (\mathcal{U} + \mathcal{W}^\perp) \cap \mathcal{W} \supseteq (\mathcal{U} + \mathcal{W}^\perp) \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}$

viceversa ma

$$\bar{v} \in (\mathcal{L} + \mathcal{W}^\perp) \cap \mathcal{W} \Rightarrow$$

$$\bar{v} \in \mathcal{L} + \mathcal{W}^\perp \Rightarrow \bar{v} = \bar{u} + \bar{x} \quad \bar{u} \in \mathcal{L}; \bar{x} \in \mathcal{W}$$

$$\bar{v} \in \mathcal{W}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{v}\|^2 &= \bar{v} \cdot \bar{v} = (\bar{u} + \bar{x}) \cdot (\bar{u} + \bar{x}) = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{x} = \\ &= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{x}\|^2 \quad \text{visto che } \bar{x} \in \mathcal{W}^\perp \subseteq \mathcal{L}^\perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ma anche} \quad \|\bar{v}\|^2 &= \bar{v} \cdot (\bar{u} + \bar{x}) = \bar{v} \cdot \bar{u} = (\bar{u} + \bar{x}) \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{u} + \bar{x} \cdot \bar{u} = \\ &= \bar{u} \cdot \bar{u} = \|\bar{u}\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}\|^2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{v} = \bar{u} \Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{L}.$$

$$\Rightarrow \Theta \cap \Sigma = [R; \mathcal{L}] // \pi$$

verifichiamo ora che $P' =$ proiezione ortogonale di P su Σ appartiene a

$$\Theta. \quad P' = [P; \mathcal{W}^\perp] \cap \Sigma \subseteq [P; \mathcal{L} + \mathcal{W}^\perp] \cap \Sigma = \Theta \cap \Sigma.$$

$\rightarrow \Theta // \pi$ è la proiezione ortogonale di Π su Σ .

Consequenza

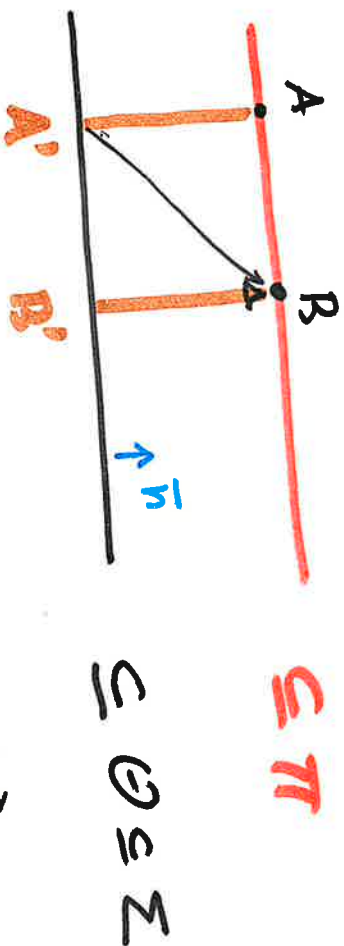
$$\forall A, B \in \Pi: d(A, \theta) = d(B, \theta)$$

Le, combinando i punti $\forall A, B' \in \theta: d(A, \pi) = d(B', \pi)$

$$\begin{aligned} A' &= [A; \mathcal{U}^+] \cap \theta & \Rightarrow & d(A, \theta) = d(A, A') \\ B' &= [B; \mathcal{U}^+] \cap \theta & & d(B, \theta) = d(B, B') \end{aligned}$$

per questo visto prima
 $A'B'$ è la proiezione
 su θ della retta AB
 e $A'B' \parallel AB$

Lavoriamo nel piano che contiene A, B, A', B'



Il vettore $\vec{B'B}$ è la proiezione su $\vec{n}$ del vettore $\vec{A'B}$
 ma anche il vettore $\vec{A'A}$ è $\Rightarrow \vec{A'A} = \vec{B'B}$

we require

$$\|\vec{A}'A\| = \|\vec{B}'B\| \Rightarrow d(A, A') = d(B, B')$$

" "

$$d(A, \emptyset) = d(B, \emptyset).$$

Inoltre

$$\vec{AB} = \vec{AA'} + \vec{A'B'} + \vec{B'B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{A'B'} \Rightarrow d(A, B) = d(A', B')$$

□

Ah! due insiem $X, Y \subseteq \mathcal{E}G_n(\mathbb{R})$ con $X \cap Y = \emptyset$

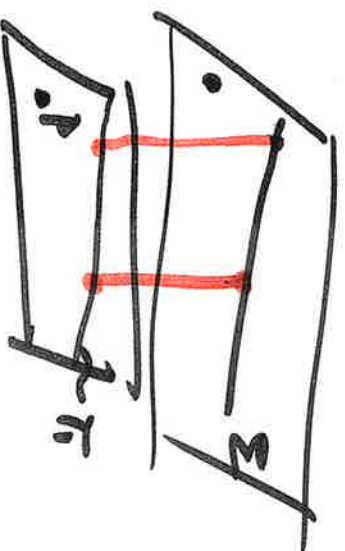
$$d(x, y) := \min \{ d(x, y) \mid x \in X, y \in Y \}.$$

$$d(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$$

$$X = \Sigma; \quad Y = \Pi \quad \text{e} \quad \Sigma = [P; \mu] \quad \text{per}$$

$$\Pi = [Q; \nu] \quad \text{con} \quad \Pi // \Sigma$$

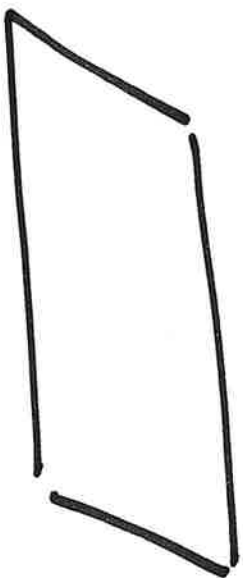
$$\Rightarrow \forall x, y \in \Sigma : d(x, \Pi) = d(y, \Pi) \quad \mu \subseteq \nu$$



$$d(x, \pi) = d(x, \pi')$$

ove $\pi' = \text{proiez. ortogonale}$
della retta su $\pi =$

$$= \pi' \cap [R; M]$$



oss: La proiezione ortogonale
di Σ su π è una
sottospazio parallelo a Σ
e della stessa dim.
di Σ . (Se $\Sigma // \pi$).
 $M \in \pi$

~~La proiezione ort. di Σ su π~~
~~in cont. tangente è data da~~



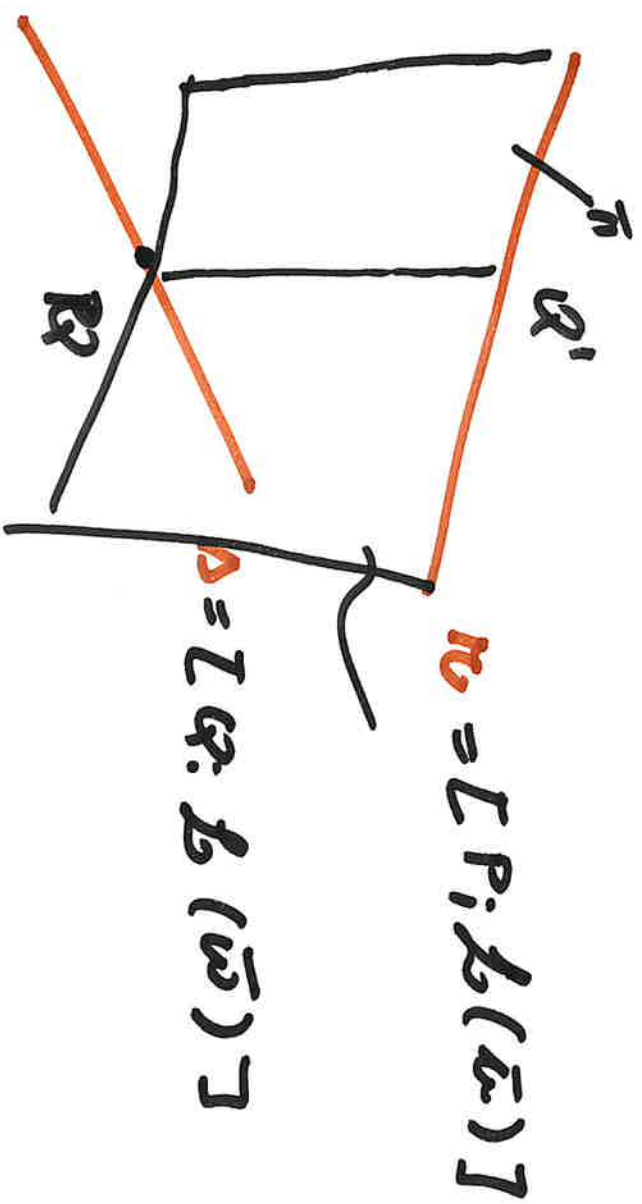
$$\pi = [R; n]$$

ci serve considerare il
piano per π in termini
con π tale che
la normale di questo
piano sia ortogonale ad
 $\bar{n}$

$$\sigma[P; L(\vec{n}, \vec{n})] \Rightarrow \sigma \cap \pi = [R; L(\vec{u}, \vec{u}) \cap \pi]$$

$$\Rightarrow [R, L(\vec{u})]$$

$$\text{perché } L(\vec{u}, \vec{u}) \cap \pi = L(\vec{u}).$$

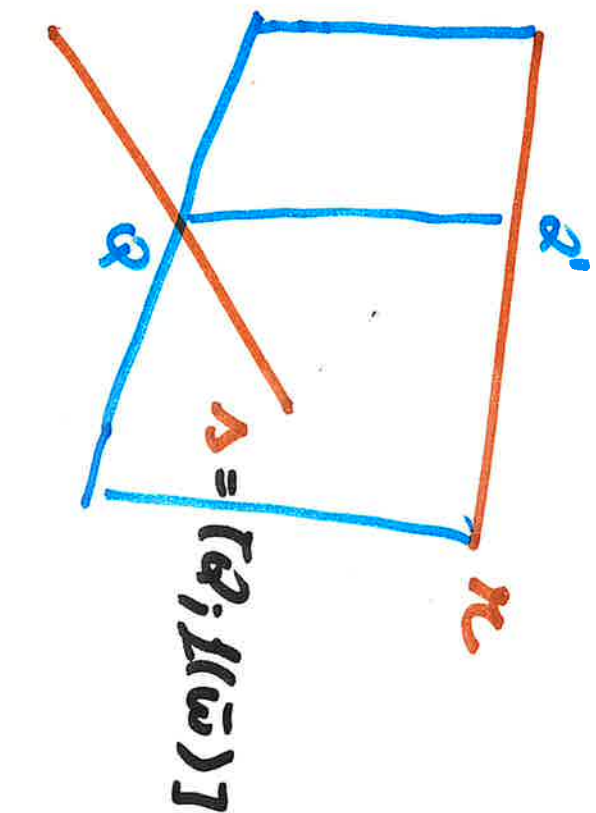


per π con direzione piano $\pi = [P; T]$
 ortogonale ad $\gamma \Rightarrow$ tale piano
 non è parallelo ad γ .

In questo caso $\langle \omega \rangle = T^\perp \Rightarrow$ l'intersezione
 fra π ed γ è un punto.

Questo punto è il dir. minimo di π .

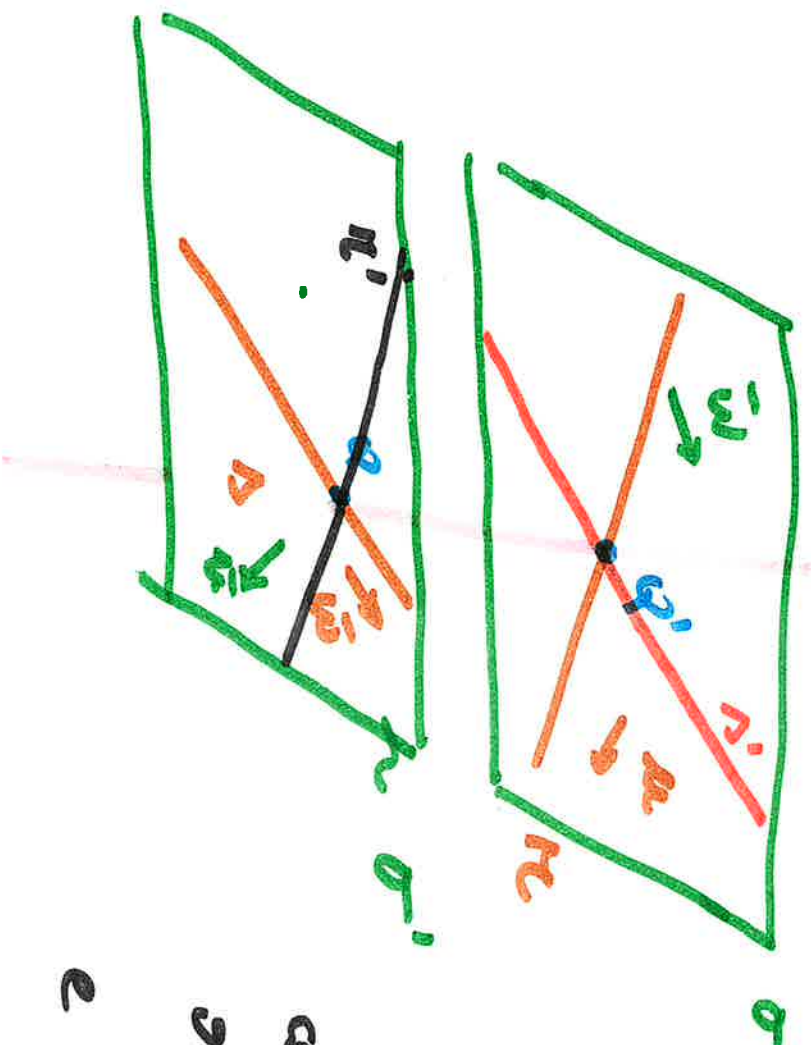
In particolare se e è la proiezione ortogonale
 $\Rightarrow e^{-1}(Q) = Q' \in \pi$ con $Q'Q \perp \pi$
 ma anche $Q'Q \perp \Delta$.



π piano ortogonale
 ad Δ e
 passante
 per P

$$\pi = \overline{P, w^1}$$

Se ho ed σ nuovo segmento $\Rightarrow \exists$ due punti
 paralleli σ e σ' tali che $\pi \subseteq \sigma, \Delta \subseteq \sigma'$
 e chiaramente $d(\pi, \sigma) \leq d(\sigma, \sigma')$.



$$\sigma = [P; h(\bar{u}, \bar{w})]$$

$$\sigma' = [P; h(\bar{u}, \bar{w})]$$

$$d(\sigma, \sigma') \leq d(\pi, \pi')$$

consideriamo la pr.
ortogonale di π su σ'

e la proiez. ort. di π'

su σ

$$\pi' \parallel \pi \text{ e } \pi' \parallel \sigma \Rightarrow \pi \cap \sigma' = \sigma'$$

$$\pi \cap \sigma = \sigma \quad \pi' \cap \sigma = \sigma$$

oss $\vec{q} \vec{q}'$ è ortogonale a $h(\bar{u}, \bar{w})$

Ma in quanto $\vec{q} \vec{q}'$ appartiene all'int. del piano

per σ ortogonale ad π $[Q; L(\bar{u})^\perp]$
e del primo per π ortogonale ad σ . $[Q'; L(\bar{w})^\perp]$

$\Rightarrow L(\bar{u})^\perp \cap L(\bar{w})^\perp = L(\bar{u}, \bar{w})^\perp$ e dunque
è ortogonale sia a σ che a σ' .

$$\Rightarrow d(Q, Q') = d(\sigma, \sigma') = d(\pi, \sigma).$$

Trovare la retta di minima distanza fra π ed σ
corrisponde a determinare una retta
 t con $t \perp \pi$, $t \perp \sigma$ e $t \cap \pi \neq \emptyset$, $t \cap \sigma \neq \emptyset$.

N.B.: Se si chiede la distanza fra π ed σ basta
calcolare $d(\sigma, \sigma') = d(Q, \sigma)$.

Luogo geometrico.

dato un punto $P = (x_P, y_P) \in \mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ determinare il

luogo dei punti a distanza dato da P .

$$d(X, P) = d \quad \Leftrightarrow d(X, P)^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = d^2$$

eq. di una circonferenza

$$\rightarrow \text{se } P = (x_P, y_P) \quad a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{11}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\rightarrow a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{11}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

con condizioni extra su a_{33}, a_{11} etc.

$$a_{11} \neq 0 \quad a_{33} \neq 0$$

$$\frac{a_{13}}{a_{11}} = -x_p$$

$$\frac{a_{23}}{a_{11}} = -y_p$$

$$\frac{a_{33}}{a_{11}} = x_p^2 + y_p^2 - d^2 \Rightarrow \frac{a_{33}}{a_{11}} = \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11}} \right)^2 - d^2$$

$$\text{con } d^2 \geq 0$$

$$d^2 = \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} \right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11}} \right)^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}} \geq 0$$

quindi

$$\frac{a_{13}^2 + a_{23}^2}{a_{11}} \geq a_{33}$$

condizione per avere una circonferenza.

$$d^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 = a_{33}a_{11}$$

$\Rightarrow$ la "circonfenza" si riduce solo ad un punto.

$$\begin{aligned} a_{13}^2 + a_{23}^2 &\neq 0_{33}a_{11} \Rightarrow \infty \text{ punti;} \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 &= a_{33}a_{11} \Rightarrow 1 \text{ punto;} \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 &< a_{33}a_{11} \Rightarrow 0 \text{ punti.} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ si lavora in ambito complesso.

$$\text{cioè si vede } EG_n(\mathbb{R}) \subseteq AG_n(\mathbb{C}). \quad (4,i) \in AG_2(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

$$P = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}((x_1, x_2, x_3))$$

$$\tilde{P} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}((x_1, x_2, x_3)).$$

Esercizio

$$[(2, 2, 1)] \in \mathbb{P}^h_{\mathbb{R}} \rightarrow (1, 2) \in \mathcal{EG}_2(\mathbb{R})$$

$$[(i, 2i, i)] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \rightarrow (1, 2) \in \mathcal{AG}_2(\mathbb{C})$$

"

$$[(1, 2, 1)]$$

COME RICONOSCERE GLI ENTI REALI IN $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$?

Idea: un punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è reale $\Leftrightarrow$ esso ammette una rappresentazione reale $\Leftrightarrow \exists$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ che è rapp. del punto dato.

Un sottospazio/sofvarietà è reale $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow$ può essere descritto mediante eq.
 a coeff. reali.

$$\text{In } AG_3(\mathbb{C}) \quad \begin{cases} x + 2iy + 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\text{OSS:}} \quad \exists z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z}$$

Def: Un punto $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è detto reale $\Leftrightarrow P = \bar{P}$
 Una varietà $\tilde{V}(F, \dots)$ è detta reale $\Leftrightarrow \tilde{V}(F) = \overline{\tilde{V}(F)}$

cioè $\tilde{V}(F) = \{(x_1 \dots x_n) : F(x_1 \dots x_{n+1}) = 0\}$.

$\Rightarrow \tilde{V}(F)$ reale α e solo α

$$\tilde{V}(F) = \{ [C\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n+1}] : F(x_1 \dots x_{n+1}) = 0 \}.$$

Similmente un sottospazio Σ è reale

α e solamente α $\Sigma = \bar{\Sigma}$

N.B. : In $AG_n(\mathbb{C})$ un punto $P = (x_1 \dots x_n)$ è

$$\text{reale} \Leftrightarrow P = \bar{P} = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) = (x_1 \dots x_n)$$

$$\Leftrightarrow x_i = \bar{x}_i \quad \forall i \quad \Leftrightarrow x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i.$$

Oss: Una varietà/soffspazio di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è reale $\Leftrightarrow$
in qualche equazione reale!!